藤田医科大学 一般選抜後期 数学

問題1

（1） 3240 （2） 28 （3） 最小値 0 最大値 4

（4） 面積 36 体積 12 （5） $\frac{5039}{5040}$ （6） $a=1$，$b=1$

（7） 9π 20π （8） $t=2$ 面積の和 128

（9） 7 （10） $y=x^3+3x^2-9x+7$

問題2

（1） （i） $n(n+1)(n+2)$が2の倍数であることを示す。

(ア) $n=2k-1$（k：自然数）の時

$n(n+1)(n+2)=(2k-1)2k(2k+1)$

$(2k-1)k(2k+1)$は整数なので 2の倍数

(イ)$n=2k$（k：自然数）の時

$n(n+1)(n+2)=2k(2k+1)(2k+2)$

$k(2k+1)(2k+2)$は整数なので 2の倍数

（ii） $n(n+1)(n+2)$が3の倍数であることを示す。

(ア)$n=3k-2$（k：自然数）の時

$n(n+1)(n+2)=(3k-2)(3k-1)3k$

$(3k-2)(3k-1)k$は整数なので 3の倍数

(イ)$n=3k-1$（k：自然数）の時

$n(n+1)(n+2)=(3k-1)\cdot 3k(3k+1)$

$(3k-1)k(3k+1)$は整数なので 3の倍数

(ウ)（k：自然数）の時$n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)$

$k(3k+1)(3k+2)$は整数なので 3の倍数

(i)と(ii)と、2と3が互いに素であるので

$n(n+1)(n+2)$は6の倍数であるといえる。

（2） $x^2+ax+b=0$ の２解を s,t（s,t：整数）とおくと、

解と係数の関係より

$a=-(s+t)\quad b=s\cdot t$

従って $a^2b-8b-2b^2=b(a^2-2-2b)-6b$

$=s\cdot t\cdot\{(s+t)^2-2-2s\cdot t\}$

$=s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$

（ｉ） $s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$ が2の倍数であることを示す。

（ア）s,t の少なくとも一方が2の倍数の時

$s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$　は明らかに2の倍数

（イ）s,t が共に奇数の時

$s=2a-1$ より $s^2=4a^2-4a+1=2(2a^2-2a)+1$

同様に　$t=2b-1$ より $t^2=2(2b^2-2b)+1$

よって　s^2+t^2-2　が　2の倍数

従って　$s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$　は常に2の倍数

（ii） $s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$ が3の倍数であることを示す。

（ア）s,t の少なくとも一方が3の倍数の時

$s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$　は明らかに3の倍数

（イ）s,t が共に3の倍数でない時

$s=3a\pm1$ より $s^2=9a^2\pm6a+1=3(3a^2\pm2a)+1$

同様に $t=3b\pm1$ より $t^2=3(3b^2\pm2b)\cdot1$

よって s^2+t^2-2　が　3の倍数

従って　$s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$　は常に3の倍数

（ｉ）と（ii）と、2と3が互いに素であるので $s\cdot t\cdot(s^2+t^2-2)$ は6の倍数であるといえる。

以上より題意は示された。

問題３

（1）$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x-a}=1$

$\frac{2}{\pi}<1$　より　$y=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{x-a}$は単調減少のグラフであり

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{0}=1$より$f(x)=0$は$x=a>0$を解に持つ。

以上より題意は示された。

（2）$g_4(x)=2^4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{x}-1=0$　の解がβ_4なので$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta_4}=\frac{1}{16}$

ここで$\frac{2}{3}<\frac{2}{\pi}<\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$に着目すると

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=\frac{64}{729}>\frac{64}{1024}=\frac{1}{16}$

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{7}<\left(\frac{5}{8}\right)^{7}=\frac{5^7}{2^{21}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{5^6}{2^{20}}<\frac{5}{2}\cdot\frac{5^6}{10^6}=\frac{5}{2^7}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16}<\frac{1}{16}$

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{7}<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta_4}=\frac{1}{16}<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{6}$より　$6<\beta_4<7$　従って$n_4=6$

（3）$\frac{13}{8}<\log_2\pi<\frac{5}{3}$　$\Leftrightarrow$　$\frac{5}{8}<\log_2\frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<\log_2\frac{2}{\pi}<-\frac{5}{8}$

（2）の$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{6}>\frac{1}{16}$　の両辺に底2の対数を取ると

$6\log_2\frac{2}{\pi}>-4$　よって　$-\frac{2}{3}<\log_2\frac{2}{\pi}$

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{8}<\left(\frac{5}{8}\right)^{8}=\frac{5^8}{2^{24}}=\frac{25}{16}\cdot\frac{5^6}{2^{20}}<\frac{25}{16}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{25}{32}\cdot\frac{1}{32}<\frac{1}{32}$

よって$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{8}<\frac{1}{32}$　両辺に底2の対数を取ると

$8\log_2\frac{2}{\pi}<-5$　よって$\log_2\frac{2}{\pi}<-\frac{5}{8}$

以上より　$-\frac{2}{3}<\log_2\frac{2}{\pi}<-\frac{5}{8}$　であり題意は示された。

～講評～

問題１

⑴　多項定理の問題。確実に解きたい。

⑵　整数問題と順列･組み合わせ。数え上げるのが大変。

⑶　関数の最大最小。マーク式なので易しい。

⑷　空間ベクトル。体積の計算はやや面倒。

⑸　Σ計算。最初の変形に気が付けば易しい。

⑹　割り算と恒等式。ωを代入するとたやすい。

⑺　ベクトルで記載されているが図形と方程式の問題。前半は円、後半は楕円であるが、後半は厳しいかもしれない。

⑻　微分積分。3次関数の性質を利用すれば楽だろう。

⑼　三角関数。変形すれば特に難しくない。

⑽ ３次関数の決定問題。移動を点の移動で処理すると楽だろう。

問題２

整数問題。倍数の証明問題で（1）は有名。（2）も同様に示せるが、厳しいかもしれない。

問題３

$\log_2 \pi$の評価をさせる問題。同様の問題は数Ⅲ微分の後半で練習することがある。（1）の証明で切り上げるのが吉。

藤田医科に合格するためには問題１にしっかり時間を割き、７～８問は解いておきたい。全体として6割と見込まれるので、マーク部分で落とした分を記述の部分で穴埋めする形で得点できれば良い。