解答速報

▌医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX × 医学部受験予備校 医特

日本医科大学 一般選抜前期 数学

$\boxed{1}$ 問1　アイ　2, 3　ウエオカキ　2, 2, 2, 3, 4

問2　ク　1350　　問3　ケ　507

$\boxed{2}$ 問1　ア　$\frac{1}{2}$　イ　$\frac{1}{2}$　ウ　0　　問2　エオカ　$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

問3　キクケ　$\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

問4　問2より$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$　始点をAに変更すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$とおくと, Eは∠BACの２等分線とBCの交点であり、

Hは∠BACの２等分線上の点であるとわかる。 Iは内心であるのでOE上であり、

したがって, O, D, A, H, I, Eは全て平面OAE上の点である。

ここで、三角形OAEの面積を求める。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\left|\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{4|\vec{b}^2|+4\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}^2|}=\frac{1}{3}\sqrt{4+2+3}=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}$$

三角形OAEの面積は$\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

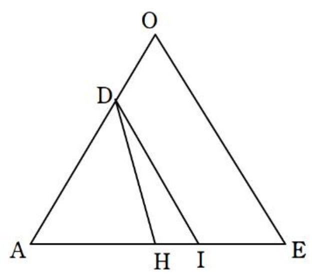
また与えられた条件より、(三角形DHIの面積)=(三角形OAEの面積)$\times\frac{1}{8}$

AI：IE=3：$\sqrt{3}$より

(△ADIの面積)$=(1-x)\frac{3}{3+\sqrt{3}}$(△OAEの面積)

AH：HE=1：1より

(△ADHの面積)$=(1-x)\frac{1}{2}$(△OAEの面積)



△DHI$=(1-x)\frac{2-\sqrt{3}}{2}$(△OAEの面積)

$$(1-x)\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$$

$$1-x=\frac{2}{8(2-\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{3}$ 問1　アイ　0，0　ウ$\sqrt{\dfrac{k}{2}}$　問2　エ　5　問3　オカキ　1，5，0

問4　クケコ　$2,\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$　サ　$\sqrt{17}$

(1)より集合Sはx軸周りの回転面であると考えられるので，AとXの最短距離は点Bから集合Sの最短距離で考えればよく，かつBと集合S上の最短距離はxy平面上で考えてよい。

Sのxy平面の断面は$x=2y^2$であり、この曲線と点B’（1，5)の最短距離を考える。

$x=2y^2$上の点をP$(2p^2,p)$とおきPB'の距離が最短となる時、点Pにおける接線とPB'が垂直であることに着目する。

$x=2y^2$の両辺をyで微分して、$\dfrac{dx}{dy}=4y$　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4y}$より

点Pにおける接線の傾きは$\dfrac{1}{4p}$　PB'の傾きは$\dfrac{p-5}{2p^2-1}$であり、これらが垂直になる時

$$\frac{1}{4p}\cdot\frac{p-5}{2p^2-1}=-1$$

$$8p^3-3p-5=0$$

$$(p-1)\cdot(8p^2+8p+5)=0$$

$p=1$　よって$P(2,1)$　$PB'=\sqrt{(1-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$

点Xは点$P'(2,1,0)$に対して、点Bを点Aに重ねる回転と同じ回転移動を行えばよいので、

$X\left(2,\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

$\boxed{4}$ 問1　$b(-x)=\dfrac{1}{2}\{a(-x)+a(x)\}=b(x)$より$b(x)$は偶関数

$c(-x)=\dfrac{1}{2}\{a(-x)-a(x)\}=-c(x)$より$c(x)$は奇関数

問2　(1)　微分の定義式より

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)-\int_x^{x+h}g(t)f(t)dt-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}-\frac{\int_x^{x+h}g(t)f(t)dt}{h}$$

ここで　$\int g(t)f(t)dt=F(t)$とおくと，

$$=\lim_{h\to0}-\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=-F'(x)=-g(x)f(x)$$

となり全てのxで$f'(x)$が定義でき、微分可能であるといえる。

また、$f'(x)=-g(x)f(x)$である。

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\{\log|1+e^x|\}'dx=\log(1+e^x)+C$

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx=\int -\{\log|3+\cos x|\}'dx=-\log|3+\cos x|+C$

より $\displaystyle G(x)=\int g(x)\,dx=\log\frac{1+e^x}{3+\cos x}+C$

$G(0)=0$　より　$\log\left(\dfrac{1+1}{3+1}\right)+C=0$　$C=\log 2$

$G(x)=\log\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}$

(3) $h'(x)=G'(x)\,e^{G(x)}\,f(x)+e^{G(x)}f'(x)=e^{G(x)}(g(x)f(x)+f'(x))=0$　$(\because(1))$

よって, $h(x)=k$　(kは定数)

$h(0)=e^{G(0)}\cdot f(0)=2$　よって, $h(x)=2$

$f(x)=2\cdot e^{-G(x)}=2\cdot\dfrac{3+\cos x}{2(1+e^x)}=\dfrac{3+\cos x}{1+e^x}$

問3 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3+\cos(-t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^t\frac{3+\cos t}{1+e^t}dt$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+e^t}\right)(3+\cos t)dt$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^{\pi}(3+\cos t)dt-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$\displaystyle 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(3+\cos t)dt=\Big[3t+\sin t\Big]_{-\pi}^{\pi}=6\pi$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=3\pi$

～講評～

Ⅰ　複素数平面を題材にした数列の問題。どれも比較的解きやすいので、ここは落とさずに解いておきたい。

Ⅱ　四面体のベクトルの問題。問 2 までは確実に得点したい。問 3 は内心の位置ベクトルの公式を暗記していたかで差がついただろう。問 4 は解答例にあるように、AHI が一直線上にあることに気が付かないと厳しい。

Ⅲ　曲面と点の最短距離。問 3 までは難なく解ける。問 4 を考える段階で問 3 までが誘導であることに気が付けるかが鍵。

Ⅳ　微積の問題。問題セットの中では比較的解きやすい。問 2 の（1）が分かれ目。ここを乗り切ると問 2 は解ききれる。問 3 は練習したことがある生徒が多いのではないだろうか。

全体として、合格者の中では得点差がつきにくい問題だったのではないだろうか。日本医科大学のレベルを考えると、ボーダーは 6 割 5 分、最低でも 5 割 5 分は得点しておきたい。